SISSEJUHATUS MATEMAATILISSE LOOGIKASSE

Kordamine eksamiks

Sümbolid

$\&$ Konjunktsioon
$\vee$ Disjunktsioon
$\supset$ Implikatsioon
$\sim$ Ekvivalents

$\vdash$ Loogiline järeldumine
$\equiv$ Loogiline samaväärsus

Sisukord

1. LAUSEARVUTUS

1. Lausearvutuse põhimõisted

Lause

… on põhimõiste, mida ei defineerita teiste üldisemate mõistete kaudu.

Lauseteks on loomuliku keele laused, mis midagi **väidavad** (küsi-, hüüd- ja käsklaused ei väida midagi). Eeldame, et käsitletavad laused rahuldavad järgmisi tingimusi:

1) **Välistatud kolmanda seadus.** Iga lause on kas tõene või väär.
2) **Mittevasturääkivuse seadus.** Ükski lause ei saa olla nii tõene kui ka väär.

Mittevasturääkivuse seadus välistab mitmesugused **paradoksid**, näiteks „See lause siin väär" ja muud taolised väited, mille tõeväärtust pole võimalik üheselt määrata.

Igal lausel on tõeväärtus **tõene** või **väär**, mida lühidalt tähistatakse t ja v. Kasutatakse ka tähti t ja f (inglise keeles *true*, *false*) või numbreid 1 ja 0.

Lausearvutuse eesmärk ei ole uurida lausete **sisulist tähendust**, vaid antud lausetest **uute lausete moodustamist**.

Lausearvutuses jagatakse keerulisemad laused **komponentlauseteks** (lihtlauseteks) ja neid ühendatavateks **grammatilisteks seosteks**. Seejuures tuuakse sisse tähised komponentlausete ja seoste märkimiseks ning pannakse vaadeldav lause kirja sümbolkujul. Komponentlausete tähistamiseks kasutatakse ladina tähti A, B, C jne, mida nimetatakse **lausemuutujateks**. Grammatilistele seostele vastavad **lausearvutuse tehted**.

Lausearvutuse tehted

Tähtsamad lausearvutuse tehted on järgmised:

1) **Eitus** (märk $\neg$). Igapäevakeeles väljendab eitus lause mittekehtimist.
2) **Konjunktsioon** (märk $\&$) tähendab seost „ja".
3) **Disjunktsioon** (märk $\vee$) väljendab seost „või" (mittevälistav).
4) **Implikatsioon** (märk $\supset$) väljendab tingimuslikku konstruktsiooni „kui …, siis …".
5) **Ekvivalents** (märk $\sim$) tähendab matemaatikas sagedasti kasutatavat seost „parajasti siis, kui" ehk „siis ja ainult siis, kui".

2. Samaväärsus

Tähtsamad lausearvutuse **põhisamaväärsused** on järgmised.

1) Idempotentsuse seadused:

$$F \& F \equiv F, \qquad F \vee F \equiv F.$$

2) Kommutatiivsuse seadused:

$$F \& G \equiv G \& F, \qquad F \vee G \equiv G \vee F.$$

3) Assotsiatiivsuse seadused:

$$(F \& G) \& H \equiv F \& (G \& H), \qquad (F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H).$$

4) Distributiivsuse seadused:

$$F \& (G \vee H) \equiv F \& G \vee F \& H, \qquad F \vee (G \& H) \equiv (F \vee G) \& (F \vee H).$$

5) Neelamisseadused:

$$F \& (F \vee G) \equiv F, \qquad F \vee F \& G \equiv F.$$

6) *De Morgani* seadused:

$$\neg(F \& G) \equiv \neg F \vee \neg G, \qquad \neg(F \vee G) \equiv \neg F \& \neg G.$$

7) Kahekordse eituse seadus:

$$\neg\neg F \equiv F.$$

8) Liikmete elimineerimise reeglid, kus T on suvaline samaselt tõene valem ja V on suvaline samaselt väär valem:

$$F \& T \equiv F, \qquad F \vee T \equiv T,$$

$$F \& V \equiv V, \qquad F \vee V \equiv F.$$

9) Implikatsiooni avaldis konjunktsiooni ja disjunktsiooni kaudu:

$$F \supset G \equiv \neg(F \& \neg G), \qquad F \supset G \equiv \neg F \vee G.$$

10) Konjunktsiooni ja disjunktsiooni avaldis implikatsiooni kaudu:

$$F \& G \equiv \neg(F \supset \neg G), \qquad F \vee G \equiv \neg F \supset G.$$

11) Ekvivalentsi avaldis teiste tehte kaudu:

$$F \sim G \equiv F \& G \vee \neg F \& \neg G, \qquad F \sim G \equiv (F \supset G) \& (G \supset F).$$

2. PREDIKAATARVUTUS

1. Predikaadid ja kvantorid

Predikaatarvutus on lausearvutuse edasiarendus, kus ka lihtlauset vaadeldakse koosnevana osadest, **indiviididest** ja **predikaatidest**. Tavaliselt märgivad indiviide lauses nimisõnad ja kõik ülejäänud lausekomponendid moodustavad predikaadi.

Definitsioon 1. Hulgal M määratud n-kohaliseks (ühesordiliseks) predikaadiks nimetatakse kujutust

$$P : M^n \to [1,0].$$

Hulka M nimetatakse predikaadi P **määramispiirkonnaks** ehk **indiviidide piirkonnaks**.

Definitsioon. Hulgal M määratud n-kohalise predikaadi P tõesuspiirkonnaks nimetatakse hulka

$$S = \{(x_1,\ldots,x_n)\ x_1,\ldots,x_n \in M \mid P(x_1,\ldots,x_n) = 1\}.$$

Definitsioon. Hulkadel $M_1,\ldots,M_n$ määratud n-kohaliseks mitmesordiliseks predikaadiks nimetatakse kujutust

$$P : M_1,\ldots,M_n \to [1,0].$$

Predikaate kui tõeväärtusega lauseid võib omavahel siduda lausearvutuse tehete abil ning moodustada nii lihtsamatest lausetest keerulisemad. Lisaks lausearvutuse tehetele võib predikaatide puhul kasutada veel kahte spetsiifilist operatsiooni, **kvantoreid**, mis annavad predikaadi tõestuspiirkonna iseloomustuse teatava argumendi järgi.

Definitsioon. Olgu $P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ hulgal M määratud n-kohaline predikaat. Kirjutis

$$\forall x_i P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$$

tähistab ($n-1$)-kohalist predikaati, mis on tõene parajasti siis, kui argumentide $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ väärtused on sellised, et **hulga M iga elemendi m korral** on $P(x_1,\ldots,m,\ldots,x_n)$ tõene.

Operatsiooni $\forall$ nimetatakse **üldisuskvantoriks** ehk **universaalsuskvantoriks**.

Definitsioon. Olgu $P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ hulgal M määratud n-kohaline predikaat. Kirjutis

$$\exists x_i P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$$

tähistab ($n-1$)-kohalist predikaati, mis on tõene parajasti siis, kui argumentide $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ väärtused on sellised, et **hulgas M leidub element m, mille korral** on $P(x_1,\ldots,m,\ldots,x_n)$ tõene.

Operatsiooni $\exists$ nimetatakse **olemasolukvantoriks** ehk **eksistentsikvantoriks**.

Kummagi kvantori rakendamisel tekkinud predikaat ei sõltu enam muutujast, mis kvantoriga seoti.

Predikaadile kvantori rakendamist nimetatakse ka **kvantifitseerimiseks**.

2. Predikaatarvutuse süntaks

Sümbolid

- **Indiviidimuutujad**, mida märgitakse tavaliselt tähtedega u, v, w, x, y, z. Iga indiviidimuutuja võib tähistada vaadeldava hulga ükskõik millist elementi (indiviidi).
- **Konstantsümbolid** a, b, c, d jne. Konstantsümbol tähistab vaadeldava hulga mingit kindlat elementi.
- **Funktsionaalsümbolid** f, g, h jne. Need tähistavad vaadeldaval hulgal määratud funktsioone.
- **Predikaatsümbolid** A, B, C jne. Need tähistavad vaadeldaval hulgal määratud predikaate.

Valem

Definitsioon 2. Termid on parajasti need, mida saab koostada alltoodud reeglite abil.
1) Iga indiviidimuutja on term.
2) Iga konstantsümbol on term.
3) Kui f on n-kohaline funktsionaalsümbol ja $t_1, \ldots, t_n$ on termid, siis $f(t_1, \ldots, t_n)$ on term.

Term on algebralise avaldise üldistus, kus indiviidimuutujate, konstantsümbolite ja funktsionaalsümbolite tähendusele ei seata kitsendusi.

Definitsioon 3. Predikaatarvutuse valemid on parajasti need, mida saab koostada alltoodud reeglite abil.
1) Kui P on n-kohaline predikaatsümbol ja $t_1, \ldots, t_n$ on termid, siis $P(t_1, \ldots, t_n)$ on predikaatarvutuse valem.
2) Kui F on predikaatarvutuse valem, siis $\neg F$ on predikaatarvutuse valem.
3) Kui F ja G on predikaatarvutuse valemid, siis $(F \,\&\, G)$, $(F \vee G)$, $(F \supset G)$, $(F \sim G)$ on predikaatarvutuse valemid.
4) Kui x on indiviidimuutuja ja F on predikaatarvutuse valem, siis $\forall x F$ ja $\exists x F$ on predikaatarvutuse valemid.

Definitsiooni esimese punkti põhjal koostatud valemeid nimetatakse **atomaarseteks valemiteks** ehk **elementaarvalemiteks**.

Vabad ja seotud muutujad

Välja arvatud esinemised vahetult kvantori järel, jagunevad iga indiviidimuutuja kõik muud esinemised valemis **seotuteks** ja **vabadeks**. Nimelt, indiviidimuutuja x esineb valemis F **seotult**, kui ta asub mingi **kvantori mõjupiirkonnas**, st. osavalemit $\forall x G$ või $\exists x G$ moodustavas valemis G. Ülejäänud esinemisi nimetatakse **vabadeks**.

Signatuur

Definitsioon. Kolmikut $\sigma = \langle C, F, P \rangle$, kus C on konstantsümbolite, F funktsionaalsümbolite ja P predikaatsümbolite hulk, nimetatakse **signatuuriks**.

Definitsioon. Olgu antud signatuur $\sigma = \langle C, F, P \rangle$. Valemit, milles esinevad konstantsümbolid kuuluvad kõik hulka C, funktsionaalsümbolid hulka F ning predikaatsümbolid hulka P, nimetatakse **valemiks signatuuris** σ.

Eeldatakse, et predikaatide hulk P ei ole tühi, sest muidu pole võimalik selles signatuuris kirja panna ühtegi valemit. Küll aga võivad hulgad C ja F olla tühjad. Samuti võivad kõik kolm hulka olla lõpmatud.

3. Predikaatarvutuse semantika

Interpretatsioon

Valemi tõeväärtus sõltub sellest, milliste objektide kohta ta midagi väidab ja kuidas temas esinevaid sümboleid mõistetakse.

Definitsioon 4. **Interpretatsioon** on paar $\alpha = (M_\alpha, I_\alpha)$, kus M_α on mingi mittetühi hulk, mida nimetatakse **põhihulgaks** ehk **interpretatsiooni kandjaks**, ja I_α on **interpreteeriv kujutus**, mis teisendab

1) Iga konstantsümboli hulga M_α mingiks elemendiks;
2) Iga n-kohalise funktsionaalsümboli mingiks n-kohaliseks funktsiooniks hulgal M_α;
3) Iga n-kohalise predikaatsümboli mingiks n-kohaliseks predikaadiks hulgal M_α.

Tuleb vahet teha sümbolil ja objektil, mida see sümbol tähistab mingis interpretatsioonis. Vahetegemine tähise ja talle omistatava sisu vahel on kasulik sellepoolest, et siis võib predikaatsümboleid ning samuti ka predikaatarvutuse valemeid käsitleda kui puhtalt süntaktilisi objekte ja rakendada nendega opereerimisel sisust sõltumatuid meetodeid.

Valemi tõeväärtuse leidmine

Ühel ja samal valemil võib olla eri interpretatsioonides erinev tähendus ja vastavalt sellele ka erinev tõeväärtus. Kui ütleme, et mingi valem on tõene või väär, tuleb seega kindlasti täpsustada, millises interpretatsioonis seda valemit vaatleme.

Definitsioon 5. Termi t väärtus t^α interpretatsioonis α vabade muutujate fikseeritud väärtustel leitakse järgmiste reeglite abil.

1) Kui $t = x$, kus x on indiviidimuutuja, siis t^α on muutuja x väärtus.
2) Kui $t = c$, kus c on konstantsümbol, siis $t^\alpha = c^\alpha$.
3) Kui $t = f(t_1,\dots,t_n)$, kus f on n-kohaline funktsionaalsümbol ja $t_1,\dots,t_n$ on termid, siis $t^\alpha = f(t_1^\alpha,\dots,t_n^\alpha)$.

Definitsioon 6. Predikaatarvutuse valemi F tõeväärtus F^α interpretatsioonis α vabade muutujate fikseeritud väärtustel leitakse järgmiste reeglite abil.

1) Kui $F = P(t_1,\dots,t_n)$, kus P on n-kohaline predikaatsümbol ja $t_1,\dots,t_n$ on termid, siis $F^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $P^\alpha(t_1^\alpha,\dots,t_n^\alpha) = 1$.
2) Kui $F = \neg G$, siis $F^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $G^\alpha = 0$.
3) Kui $F = G \& H$, siis $F^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $G^\alpha = 1$ ja $H^\alpha = 1$.
4) Kui $F = G \vee H$, siis $F^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $G^\alpha = 1$ või $H^\alpha = 1$.
5) Kui $F = G \supset H$, siis $F^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $G^\alpha = 0$ või $H^\alpha = 1$.
6) Kui $F = G \& H$, siis $F^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $G^\alpha = 1$ ja $H^\alpha = 1$ või $G^\alpha = 0$ ja $H^\alpha = 0$.
7) Kui $F = \forall x G$, siis $F^\alpha = 1$ parajasti siis, kui põhihulga M_α iga elemendi m korral $G^\alpha_{[x/m]} = 1$.
8) Kui $F = \exists x G$, siis $F^\alpha = 1$ parajasti siis, kui põhihulgas M_α leidub selline element m, et $G^\alpha_{[x/m]} = 1$.

$[x/m]$ tähendab, et muutuja x väärtuseks loetakse element m.

Mudel

Definitsioon. Interpretatsiooni α, milles valem F on tõene oma vabade muutujate kõikidel väärtustustel, nimetatakse **valemi F mudeliks**.

Väidete kirjutamine valemina

Kui on fikseeritud signatuur, siis tuleb valemite koostamisel piirduda signatuuris näidatud sümbolitega.

Definitsioon. Kui valemi F interpretatsioon ja predikaat P on vabade muutujate kõikidel väärtustustel sama tõeväärtusega, siis ütleme, et **valem F väljendab predikaati P**.

Näide. Vaatleme väiteid naturaalarvude kohta. Signatuur olgu $\langle 0,1;+,-;=\rangle$, kõiki sümboleid interpreteerime tavapärases tähenduses.

Väide (predikaat)	**Valem**
„$x=2$”	$x=1+1$
„$x \le y$”	$\exists z(x+z=y)$
„x on paarisarv”	$\exists y(x=y+y)$

Näide. Vaatleme väiteid naturaalarvude alamhulkade kohta. Signatuur olgu $\langle ;;\subseteq\rangle$. predikaatsümboli interpretatsioon olgu standardne.

Väide (predikaat)	**Valem**
„X on tühihulk”	$\forall Y(X \subseteq Y)$

Mõne predikaadi väljendamiseks tuleb rakendada üsnagi kunstlikke võtteid.

4. Valemite omadused

Valemiklassid

Definitsioon 7. Predikaatarvutuse valemit F nimetatakse 1) **samaselt tõeseks** ehk **loogiliselt tõeseks**, kui ta on tõene igas interpretatsioonis oma vabade muutujate kõikidel väärtustel; 2) **samaselt vääraks** ehk **loogiliselt vääraks**, kui ta on väär igas interpretatsioonis oma vabade muutujate kõikidel väärtustel;
Definitsioon 8. Predikaatarvutuse valemit F nimetatakse **kehtestatavaks**, kui ta on tõene vähemalt ühes interpretatsioonis vabade muutujate mingitel väärtustel.
Teoreem 1. Valem F on samaselt tõene parajasti siis, kui tema eitus $\neg F$ on samaselt väär.
Teoreem 2. Valem F on kehtestatav parajasti siis, kui tema eitus $\neg F$ ei ole samaselt tõene.
Teoreem (Predikaatarvutuse mittelahenduvuse teoreem, 1936 – Alonzo Church). Pole olemas algoritmi, mis suudaks suvalise predikaatarvutuse valemi puhul kindlaks teha, kas valem on samaselt tõene või mitte.

Kvantoriga valemite väärtuse kontrollimise tööaeg on lõpmatu põhihulga puhul **lõpmatu**.

5. Samaväärsused

Definitsioon 9. Öeldakse, et **valemitest** $F_1, F_2, \ldots, F_n$ **järeldub valem** G, kui igas interpretatsioonis valemite vabade muutujate kõikidel väärtustel, kus valemid $F_1, F_2, \ldots, F_n$ on tõesed, on ka valem G tõene.

Definitsioon 10. Valemeid F ja G nimetatakse **loogiliselt samaväärseteks**, kui nende tõeväärtused on võrdsed igas interpretatsioonis valemite vabade muutujate kõikidel väärtustel.

Kõik lausearvutuse põhisamaväärsused kehtivad ka predikaatarvutuses. Lisaks kehtivad predikaatarvutuses **kvantoreid käsitlevad samaväärsused**, mis on järgmised.

1) Kvantori ja eituse vahetamisseadus:

$$\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x), \qquad \neg\exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x).$$

2) Kvantorite distributiivsus:

$$\forall x (F(x) \,\&\, G(x)) \equiv \forall x F(x) \,\&\, \forall x G(x), \qquad \exists x (F(x) \vee G(x)) \equiv \exists x F(x) \vee \exists x G(x).$$

3) Kui indiviidimuutuja x ei esine valemis G vabalt, siis

$$\forall x (F(x) \,\&\, G) \equiv \forall x F(x) \,\&\, G, \qquad \exists x (F(x) \,\&\, G) \equiv \exists x F(x) \,\&\, G.$$

$$\forall x (F(x) \vee G) \equiv \forall x F(x) \vee G, \qquad \exists x (F(x) \vee G) \equiv \exists x F(x) \vee G.$$

4) Kui indiviidimuutuja x ei esine valemis G vabalt, siis

$$\forall x (F(x) \supset G) \equiv \exists x F(x) \supset G, \qquad \exists x (F(x) \supset G) \equiv \forall x F(x) \supset G.$$

Kui indiviidimuutuja x ei esine valemis F vabalt, siis

$$\forall x (F \supset G(x)) \equiv F \supset \forall x G(x), \qquad \exists x (F \supset G(x)) \equiv F \supset \exists x G(x).$$

5) Seotud muutujate ümbernimetamine:

$$\forall x F(x) \equiv \forall y F(y), \qquad \exists x F(x) \equiv \exists y F(y),$$

Kus y ei esine valemis $F(x)$.

6) Samaliigiliste kvantorite kommutatiivsus:

$$\forall x \forall y F(x,y) \equiv \forall y \forall x F(x,y), \qquad \exists x \exists y F(x,y) \equiv \exists y \exists x F(x,y).$$

Tõestus (1. rühma 1. samaväärsus).
Eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\neg\forall x F(x) = 1$. Siis $\forall x F(x) = 0$. Seega pole nii, et interpretatsiooni põhihulga iga elemendi $m \in M_\alpha$ korral $F(m) = 1$ (st $(F(x))^{\alpha}_{[x/m]} = 1$), vaid leidub niisugune $m_0 \in M_\alpha$, et $F(m_0) = 0$. Siis aga $\neg F(m_0) = 1$ ja olemasolukvantori mõiste kohaselt $\exists x \neg F(x) = 1$.

Ümberpöördult, eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\exists x \neg F(x) = 1$. Siis peab leiduma element $m_0 \in M_\alpha$, et $\neg F(m_0) = 1$ ehk $F(m_0) = 0$. Kuna leidub element nii, et valem $F(x)$ on väär, siis $\forall x F(x) = 0$. Järelikult $\neg\forall x F(x) = 1$. ■

Tõestus (1. rühma 2. samaväärsus).

Eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\neg\exists xF(x)=1$. Näitame, et siis ka $\forall x\neg F(x)=1$. Valime suvalise elemendi $m\in M_\alpha$. Kui oleks $\neg F(m)=0$ ehk $F(m)=1$, siis oleks $\exists xF(x)=1$ ehk $\neg\exists xF(x)=0$, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult peab kehtima $\neg F(m)=1$. Et m oli suvaline element, siis $\forall x\neg F(x)=1$.

Ümberpöördult, eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\forall x\neg F(x)=1$. Oletame vastuväiteliselt, et $\neg\exists xF(x)=0$. Siis $\exists xF(x)=1$. Seega leidub põhihulgas M_α element m_0, mille korral $F(m_0)=1$ ehk $\neg F(m_0)=0$. Seetõttu $\forall x\neg F(x)=0$ (sest $\neg F(x)$) ei ole iga x korral tõene). Viimane tulemus on vastuolus eeldusega. Järelikult meie oletus ei saa kehtida ja tõepoolest $\neg\exists xF(x)=1$. ■

Tõestus (2. rühma 1. samaväärsus).

Eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\forall x(F(x)\&G(x))=1$. Näitame, et siis ka $\forall xF(x)\&\forall xG(x)=1$. Konjunktsiooni tõesuseks piisab näidata, et mõlemad liikmed on tõesed. Tõestame, et $\forall xF(x)=1$. Selleks valime põhihulgast M_α suvalise elemendi m. Eeldusest saame, et elemendi m korral $F(m)\&G(m)=1$, millest $F(m)=1$. Et m oli suvaline element, siis $\forall xF(x)=1$. Analoogiliselt põhjendame, et ka konjunktsiooni teine liige on tõene.

Eeldame nüüd, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\forall xF(x)\&\forall xG(x)=1$. Näitame, et siis ka $\forall x(F(x)\&G(x))=1$. Valime suvalise elemendi $m\in M_\alpha$. Eelduse põhjal $\forall xF(x)=1$ ja $\forall xG(x)=1$, mistõttu $F(m)=1$ ja $G(m)=1$. Seega $F(m)\&G(m)=1$. Et m oli suvaline, siis $\forall x(F(x)\&G(x))=1$. ■

Tõestus (2. rühma 2. samaväärsus).

Eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel $\exists x(F(x)\vee G(x))=1$. Siis leidub interpretatsiooni põhihulgas selline element $m_0\in M_\alpha$, et $F(m_0)\vee G(m_0)=1$. Kui disjunktsioon on tõene põhjusel, et tema esimene liige on tõene, st $F(m_0)=1$, siis on $\exists xF(x)=1$ ja $\exists xF(x)\vee\exists xG(x)=1$. Kui disjunktsioon on tõene seetõttu, et tema teine liige on tõene, siis saame analoogiliselt $\exists xF(x)\vee\exists xG(x)=1$.

Eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\exists xF(x)\vee\exists xG(x)=1$. Kui selles valemis on $\exists xF(x)=1$, siis leidub element $m_0\in M_\alpha$ nii, et $F(m_0)=1$. Järelikult $F(m_0)\vee G(m_0)=1$ ja $\exists x(F(x)\vee G(x))=1$. Kui aga $\exists xG(x)=1$, siis leidub element $m_0\in M_\alpha$, mille korral $G(m_0)=1$, järelikult $F(m_0)\vee G(m_0)=1$ ja $\exists x(F(x)\vee G(x))=1$ ka sellisel juhul. ■

Tõestus (3. rühma 1. samaväärsus).

Eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\forall x(F(x)\&G)=1$. Vaja on näidata, et $\forall xF(x)\&G=1$ ehk $\forall xF(x)=1$ ja $G=1$. Tõestame esiteks, et $\forall xF(x)=1$. Valime põhihulga suvaline elemendi $m\in M_\alpha$. Eeldusest saame siis $F(m)\&G=1$, millest $F(m)=1$. Et m on suvaline, järeldub siit $\forall xF(x)=1$. Teiseks tõestame, et $G=1$. Kui G oleks väär, siis eelduses on kvantorialune avaldis $F(m)\&G$ väär ja seega oleks väär ka eeldus ise.

Ümberpöördult, eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\forall x F(x) \& G = 1$. Näitame, et $\forall x(F(x) \& G) = 1$. Olgu $m \in M_\alpha$ põhihulga suvaline element. Eelduse põhjal siis $F(m) = 1$, mistõttu $F(m) \& G = 1$. Et m oli suvaline element, siis ka $\forall x(F(x) \& G) = 1$. ■

Tõestus (3. rühma 2. samaväärsus).

Eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\forall x(F(x) \vee G) = 1$. Näitame, et $\forall x F(x) \vee G = 1$. Oletame vastuväiteliselt, et $\forall x F(x) \vee G = 0$. Siis peab olema $\forall x F(x) = 0$ ja $G = 0$. Et valem $\forall x F(x)$ on väär, siis leidub element $m_0 \in M_\alpha$, et $F(m_0)$ on väär. Selle elemendi korral on $F(m_0) \vee G = 0$, sest G on väär sõltumata elemendist m_0. Üldisuskvantori definitsiooni tõttu saame $\forall x(F(x) \vee G) = 0$, vastuolu.

Eeldame, et fikseeritud interpretatsioonis α ja valemite vabade muutujate väärtustel on $\forall x F(x) \vee G = 1$. Valime põhihulgast suvalise elemendi m. Kui disjunktsioonis on tõene esimene liige, st $\forall x F(x) = 1$, siis ka $F(m) = 1$ ja $F(m) \vee G = 1$. Kui disjunktsioonis on tõene teine liige, siis samuti $F(m) \vee G = 1$. Järelikult on suvalise elemendi m korral $F(m) \vee G = 1$, seega $\forall x(F(x) \vee G) = 1$. ■

Ülejäänud 3. rühma samaväärsused tõestatakse analoogiliselt.

4. rühma samaväärsuste tõestamisel võime kasutada juba eelnevalt tõestatud samaväärsusi.

Tõestus (4. rühma 1. samaväärsus).

Lähtume vasakust poolest ja teisendame selle paremaks pooleks. Kõigepealt elimineerime lausearvutuse seaduste põhjal implikatsiooni:

$$\forall x(F(x) \supset G) \equiv \forall x(\neg F(x) \vee G).$$

Tekkinud valemile võime rakendada 3. rühma 2. samaväärsust, sest valem G ei sisalda muutujat x vabalt. Saame

$$\forall x(\neg F(x) \vee G) \equiv \forall x \neg F(x) \vee G.$$

1. rühma 2. samaväärsuse abil toome eituse kvantori alt välja:

$$\forall x(\neg F(x) \vee G) \equiv \neg \exists x F(x) \vee G.$$

Kasutame uuesti implikatsiooni avaldist teiste tehete kaudu:

$$\neg \exists x F(x) \vee G \equiv \exists x F(x) \supset G.$$

Sellega on samaväärsus tõestatud. ■

Ülejäänud 4. rühma samaväärsused saab tõestada samasuguse võttega.

Kahe viimase rühma tõestused on sirgjoonelised.

3. AKSIOMAATILISED TEOORIAD

1. Aksiomaatilise teooria üldskeem

Süntaks

Formaalne aksiomaatiline teooria ehitatakse üles järgmise üldskeemi kohaselt.

1) Fikseeritakse **tähestik** ja antakse **valemi** definitsioon.
2) Osa valemeid loetakse **aksioomideks**. Neid pole teoorias vaja tõestada.
3) Fikseeritakse lõplik hulk **tuletusreegleid** kujul

$$\frac{F_1, F_2, \ldots, F_n}{G},$$

mis lubavad valemitest $F_1, F_2, \ldots, F_n$ vahetult tuletada valemi G.

Valem on kindlapiiriline mõiste ja kujutab endast kasutatava tähestiku sümbolite järjendit.

Üldskeem ei määra, millise printsiibi järgi loetakse valemeid aksioomideks, sest loogika seisukohalt pole see oluline. Selleks et üldse oleks võimalik teoreeme tõestada, peab teoorias olema vähemalt üks aksioom.

Aksioomidega fikseeritakse kõikvõimalike struktuuride klass, kus aksioomid kehtivad.

Tõestussamme saab teha ainult tuletusreeglite abil. Tuletusreegli alumise valemi võib lugeda tõestatuks ainult siis, kui vastavad ülemised valemid on tõestatud või aksioomid.

Definitsioon 1. **Tuletuseks** ehk **formaalseks tõestuseks** nimetatakse valemeti jada $F_1, F_2, \ldots, F_n$, milles iga valem on kas aksioom või saadud mingi tuletusreegliga mõnedest temale eelnevatest valemitest.

Definitsioon. Valemit F nimetatakse **tõestatavaks**, kui leidub tuletus, mille viimane liige on valem F.

Valemid on puhtalt süntaktilised objektid, millel enne vastavat määrangut puudub sisu. Tuletusreegleid kasutades saab olemasolevatest sümbolijadadest koostada uusi. Valemi tõestamiseks piisab, kui kirjutame aksioome reeglite kohaselt sobival viisil ümber.

Mitteformaalselt tähendab aksioom väidet, mis on silmnähtavalt õige, ning tõestuseks loetakse esimesest väitest teise järeldamist, kui teine väide on esimesega piisavalt põhjendatud.

Semantika

Tähenduse (tõeväärtuse „tõene” või „väär”) annab valemitele semantika.

Süntaksi ja semantika vahekorda kirjeldavad järgmised kaks mõistet:

Definitsioon 2. Aksiomaatilist teooriat T nimetatakse semantika S suhtes

1) **korrektseks**, kui iga teoorias T tuletatav valem on semantikas S tõene;
2) **täielikuks**, kui iga semantikas S tõene valem on teoorias T tuletatav.

Matemaatilise loogika uurimustest on selgunud, et aksiomaatilise teooria täielikkus pole paljudel olulistel juhtudel (näiteks naturaalarvude aritmeetika korral) saavutatav.

Korrektsuse nõudest loobumine, niisugune aksiomaatika, kus saaks tuletada ka teatavaid vääri valemeid, ei tule aga kõne alla.

2. Sekventsiaalne lausearvutus

Definitsioon. Gentženi-tüüpi lausearvutuse aksiomaatiline teooria defineeritakse järgmiselt:

1) Tuletatavateks objektideks on **sekventsid**, avaldised kujul

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G,$$

kus $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$ on lausearvutuse valemid, mis ei sisalda ekvivalentsi.

2) Aksioomid on sekventsid

$$\Gamma, F, \Delta \vdash F,$$

kus F on mingi lausearvutuse valem ning Γ ja Δ tähistavad suvalisi valemite järjendeid, mis võivad olla ka tühjad.

3) Tuletusreeglid on järgmised.

Paremale sissetoomise reegel	Vasakule sissetoomise või paremalt eemaldamise reegel
$\dfrac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \& G} \ (\vdash \&)$	$\dfrac{\Gamma, F, G \vdash H}{\Gamma, F \& G \vdash H} \ (\& \vdash)$
$\dfrac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G} \quad \dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G} \ (\vdash \vee)$	$\dfrac{\Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma, F \vee G \vdash H} \ (\vee \vdash)$
$\dfrac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \supset G} \ (\vdash \supset)$	$\dfrac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash F \supset G}{\Gamma \vdash G} \ (\vdash \not\supset)$
$\dfrac{\Gamma, F \vdash G \quad \Gamma, F \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \neg F} \ (\vdash \neg)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg F}{\Gamma \vdash F} \ (\vdash \not\neg)$

Struktuursed reeglid

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F} \ (S+) \qquad \frac{\Gamma, \Delta, F \vdash G}{\Gamma, F, \Delta \vdash G} \ (S\sim)$$

Sekventsi $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G$ vasakpoolset osa $F_1, F_2, \ldots, F_n$ nimetatakse **eesliikmeks**, parempoolset osa G aga **tagaliikmeks**. Eesliige võib olla ka tühi. Sekventsi $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G$ mõistame väitena, et valemitest $F_1, F_2, \ldots, F_n$ järeldub valem G.

Aksioomideks olevad sekventsid väljendavad kõige ilmsemat järeldumist. Kindlasti võime eeldustest järeldada väite, kui väide esineb ise juba eelduste hulgas.

Teooria peamine tuletusaparaat on koondatud tuletusreeglitesse. Need vastavad enam-vähem **matemaatikas kasutatavatele tõestusvõtetele**.

Tuletamine

Definitsiooni järgi on tuletus sellises süsteemis sekventside jada, kus järjekordse sekventsi saamiseks viidatakse tuletusreeglile ja sobivatele eespool asetsevatele sekventsidele. Ent **tuletust otsida** on käesolevas süsteemis otstarbekam mitte jada, vaid **puu** kujul. Etteantud sihtsekventsist lähtudes selgitame, millise reegliga see tekkida võib. Teinud reegli kindlaks, otsime järgmisi reegleid, millega saavad tekkida antud sekventsi eeldused jne. Puud konstrueerime seega **alt üles** liikudes, püüdes tükeldada sekventsi valemeid **osavalemiteks**.

Eituse paremale sissetoomise reegli ($\vdash\neg$) puhul tuleb joonepealsete sekventside paremates pooltes esinev valem **määrata ise**. See tuleb valida nii, et kummaski harus tekiks tuletatav sekvents, st. et tuletuspuu haru oleks võimalik jätkata kuni aksioomideni. Enamasti sobib selleks mõni **sekventsi vasakul pool asuvate valemite osavalem**.

Korrektsus

Definitsioon 3. Sekventsi $F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$ **valemkujuks** nimetatakse valemit $F_1 \& F_2, ... \& F_n \supset G$, kui $n > 0$, ja valemit G, kui $n = 0$.

Teoreem 1 (Lausearvutuse korrektsuse teoreem).
Kui sekvents $F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$ on tuletatav, siis tema valemkuju on samaselt tõene.

Tõestus.
Kasutame induktsiooni tuletuspuu struktuuri järgi.

Induktsiooni baas
Kui sekvents on aksioom, siis esineb tagaliikme valem eesliikme valemite hulgas ning sekventsil on kuju $F_1, ..., F_i, ..., F_n \vdash F_i$. Selle sekventsi valemkuju on $F_1 \& ... \& F_i \& ... \& F_n \supset F_i$. Viimase valemi samaselt tõesus on ilmne.

Induktsiooni samm
Näitame iga reegli korral, et kui mingil valemites esinevate lausemuutujate väärtustusel on kõigi joonepealsete sekventside valemkujud tõesed, siis on sellel väärtustusel tõene ka joonealuse sekventsi valemkuju. St valemkuju tõesus antud väärtustusel levib mööda tuletuspuud allapoole. Et aksioomide valemkujud on samaselt tõesed, siis on järelikult samaselt tõesed ka kõigi tuletatud sekventside valemkujud. Vaatleme siinkohal sekventse $F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$, kus $n > 0$.

Implikatsiooni paremale sissetoomise reegel ($\vdash\supset$)

Kui Γ koosneb valemitest $F_1, F_2, ..., F_n$, siis joonepealse sekventsi valemkuju on $F_1 \& ... \& F_n \& F \supset G$ joonealuse sekventsi valemkuju aga $F_1 \& ... \& F_n \supset (F \supset G)$.

Oletame, et mingil väärtustusel on esimene valemkuju tõene ja teine väär. Sellel väärtustusel peab valem $F_1 \& ... \& F_n$ olema tõene ja valem $F \supset G$ väär. Viimasest järeldub, et valem F on tõene ja valem G on väär. Nüüd aga saame, et esimene valemkuju on väär, sest implikatsiooni eesliige on tõene ja tagaliige väär, vastuolu.

Implikatsiooni paremalt eemaldamise reegel ($\vdash\not\supset$)

Kui Γ koosneb valemitest $F_1, F_2, ..., F_n$, siis joonepealsete sekventside valemkujud on $F_1 \& ... \& F_n \supset F$ ja $F_1 \& ... \& F_n \supset (F \supset G)$ ning joonealuse sekventsi valemkuju $F_1 \& ... \& F_n \supset G$.

Oletame, et mingil väärtustusel on esimesed kaks valemkuju tõesed, kuid kolmas väär. Siis peab valem $F_1 \& ... \& F_n$ olema sellel väärtustusel tõene ja valem G väär. Et esimene valemkuju on tõene ja implikatsiooni eesliige on tõene, siis on ka valem F tõene. Nüüd on teise implikatsiooni eesliige vaadeldaval väärtustusel tõene, tagaliige väär ja kogu implikatsioon väär, vastuolu teise valemkuju tõesusega.

Eituse paremale sissetoomise reegel ($\vdash\neg$)

Kui Γ koosneb valemitest $F_1, F_2, ..., F_n$, siis joonepealsete sekventside valemkujud on $F_1 \& ... \& F_n \& F \supset G$ ja $F_1 \& ... \& F_n \& F \supset \neg G$ ning joonealuse sekventsi valemkuju $F_1 \& ... \& F_n \supset \neg F$.

Oletame, et mingil väärtustusel on esimesed kaks valemkuju tõesed, kuid kolmas väär. Siis peab valem $F_1, F_2, ..., F_n$ olema sellel väärtustusel tõene, valem $\neg F$ väär ning valem F tõene. Järelikult on kahes esimeses valemkujus implikatsiooni eesliige tõene. Kui vaadeldaval väärtustusel on valem G väär, siis on esimene valemkuju samuti väär; kui aga valem G on tõene, siis on $\neg G$ väär ja teine valemkuju väär. Mõlemal juhul saame vastuolu vastava valemkuju tõestusega.

Eituse paremalt eemaldamise reegel ($\vdash\not\neg$)

Kui Γ koosneb valemitest $F_1, F_2, ..., F_n$, siis joonepealse sekventsi valemkuju on $F_1 \& ... \& F_n \supset \neg\neg F$ ning joonealuse sekventsi valemkuju $F_1 \& ... \& F_n \supset F$.

Oletame, et mingil väärtustusel on esimene valemkuju tõene ja teine väär. Sellel väärtustusel peab valem $F_1 \& ... \& F_n$ olema tõene ja valem F väär. Viimasest järeldub, et valem $\neg F$ on tõene ja $\neg\neg F$ on väär. Nüüd aga saame, et esimene valemkuju on väär, sest implikatsiooni eesliige on tõene ja tagaliige väär, vastuolu.

Konjunktsiooni paremale sissetoomise reegel ($\vdash\&$)

Kui Γ koosneb valemitest $F_1, F_2, ..., F_n$, siis joonepealsete sekventside valemkujud on $F_1 \& ... \& F_n \supset F$ ja $F_1 \& ... \& F_n \supset G$ ning joonealuse sekventsi valemkuju $F_1 \& ... \& F_n \supset F \& G$.

Oletame, et mingil väärtustusel on esimesed kaks valemkuju tõesed, kuid kolmas väär. Siis peab valem $F_1 \& ... \& F_n$ olema sellel väärtustusel tõene ja valem $F \& G$ väär. Konjunktsiooni definitsioonist, kui F on väär, siis esimene valem väär, vastuolu; kui G on väär, siis teine valem väär, vastuolu.

Konjunktsiooni vasakule sissetoomise reegel ($\&\vdash$)

Kui Γ koosneb valemitest $F_1, F_2, ..., F_n$, siis joonepealse sekventsi valemkuju on $F_1 \& ... \& F_n, F, G \supset H$ ning joonealuse sekventsi valemkuju $F_1 \& ... \& F_n, F \& G \supset H$.

Oletame, et mingil väärtustusel on esimene valemkuju tõene ja teine väär. Sellel väärtustusel peab valem $F_1 \& ... \& F_n, F \& G$ olema tõene ja valem H väär. Nüüd aga saame, et esimene valemkuju on väär, sest implikatsiooni eesliige on tõene (konjunktsiooni definitsioonist, kui $F \& G$ on tõene, siis F ja G on tõesed) ja tagaliige väär, vastuolu.

Disjunktsiooni paremale sissetoomise reegel ($\vdash\vee$)

Kui Γ koosneb valemitest $F_1, F_2, \ldots, F_n$, siis esimese joonepealse sekventsi valemkuju on $F_1 \& \ldots \& F_n \supset F$ ning esimese joonealuse sekventsi valemkuju $F_1 \& \ldots \& F_n \supset F \vee G$; teise joonepealse sekventsi valemkuju on $F_1 \& \ldots \& F_n \supset G$ ning teise joonealuse sekventsi valemkuju on $F_1 \& \ldots \& F_n \supset F \vee G$.

Oletame, et mingil väärtustusel on esimene valemkuju tõene ja teine väär. Sellel väärtustusel peab valem $F_1 \& \ldots \& F_n$ olema tõene ja valem $F \vee G$ väär. Disjunktsiooni definitsioonist, kui $F \vee G$ on väär siis on väärad ka F, vastuolu esimesest valemist; ja G, vastuolu teisest valemist.

Disjunktsiooni vasakule sissetoomise reegel ($\vee\vdash$)

Kui Γ koosneb valemitest $F_1, F_2, \ldots, F_n$, siis joonepealsete sekventside valemkujud on $F_1 \& \ldots \& F_n \& F \supset H$ ja $F_1 \& \ldots \& F_n \& G \supset H$ ning joonealuse sekventsi valemkuju $F_1 \& \ldots \& F_n \& F \vee G \supset H$.

Oletame, et mingil väärtustusel on esimesed kaks valemkuju tõesed, kuid kolmas väär. Siis peab valem $F_1 \& \ldots \& F_n \& F \vee G$ olema sellel väärtustusel tõene ja valem H väär. $F \vee G$ on disjunktsiooni definitsiooni põhjal tõene, kui F on tõene või G on tõene. Kui F on tõene, siis esimese valemkuju implikatsiooni eesliige on tõene ja tagaliige väär, seega esimene valemkuju on väär, vastuolu. Kui G on tõene, siis teise valemkuju implikatsiooni eesliige on tõene ja tagaliige väär, seega teine valemkuju on väär, vastuolu. ■

Üldine reegel antud teoreemi induktsiooni sammu tõestamiseks: panna kirja tuletusreegli joonepealsete ja joonealuste sekventside valemkujud. Tõestada vastuväiteliselt, et mingitel väärtustustel on joonepealsete sekventside valemkujud tõesed kuid joonealuste sekventside valemkujud väärad. Leides kõikidel juhtudel vastuolu, on antud tuletusreegli korral teoreem tõestatud.

Mittevasturääkivus

Definitsioon 4. Aksiomaatilist teooriat T nimetatakse **vasturääkivaks**, kui leidub selline valem F, et teoorias T on tuletatavad sekventsid $\vdash F$ ja $\vdash \neg F$. Vastasel korral nimetatakse teooriat T **mittevasturääkivaks**.

Teoreem 2 (Lausearvutuse mittevasturääkivuse teoreem).
Sekventsiaalne lausearvutus on mittevasturääkiv.

Tõestus.
Oletame vastupidi, et leidub selline lausearvutuse valem F, et on tuletatavad nii sekvents $\vdash F$ kui ka sekvents $\vdash \neg F$. Korrektsuse teoreemi põhjal on iga tuletatava sekventsi valemkuju samaselt tõene. See tähendab, et valemid F ja $\neg F$ peaksid olema samaselt tõesed, mis aga on võimatu. ■

Täielikkus

Teoreem 3 (Lausearvutuse täielikkuse teoreemi põhilemma).
Olgu F lausearvutuse valem ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kõik temas esinevad lausemuutujad. Kui valem F on muutujate väärtustusel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tõene (väär), siis on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash F$ (vastavalt $A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg F$).

Siin $A^1 = A$ ja $A^0 = \neg A$.

Sisuliselt väidab teoreem seda, et me saame aksiomaatilises süsteemis välja arvutada valemi tõeväärtuse etteantud väärtustusel. Näiteks valemi $\neg A \vee B$ ja muutujate A, B väärtustuse $(1,0)$ korral väidab teoreem, et tuletatav on sekvents $A, \neg B \vdash \neg(\neg A \vee B)$, sest vaadeldav valem on sellel väärtustusel väär.

Tõestus.

Kasutame induktsiooni valemi F struktuuri järgi.

Induktsiooni baas.

Kui F on lausemuutuja, näiteks A_1 ja $\alpha_1 = 1$, siis teoreemi väite kohaselt peab olema tuletatav sekvents $A_1 \vdash A_1$. Kui $\alpha_1 = 0$, siis peab olema tuletatav sekvents $\neg A_1 \vdash \neg A_1$. Mõlemad sekventsid on tuletatavad, sest nad on aksioomid.

Induktsiooni samm.

Vaatleme eraldi juhte ehituse järgi.

Juht 1 ($\neg$).

Olgu valem F kujul $\neg G$. Eeldame, et valemi G jaoks teoreemi väide kehtib. Vaatleme väärtustust $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Kui valem F on sellel väärtustusel tõene, siis on vaja näidata, et tuletatav on sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash F$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg G$. Et valem G on vaadeldaval väärtustusel väär, siis on viimane sekvents tuletatav induktsiooni eelduse põhjal.

Kui valem F on antud väärtustusel väär, siis peame näitama, et tuletatav on sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg F$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\neg G$. Et valem G on tõene, siis on induktsiooni eelduse põhjal tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G$. Otsitava sekventsi saame tuletada järgmiselt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \neg G \vdash G} \qquad \dfrac{}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}, \neg G \vdash \neg G}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\neg G}.$$

Vasaku haru sekvents on tuletatav induktsiooni eelduse põhjal.

Juht 2 ($\&$).

Olgu valem F kujul $G \& H$. Eeldame, et valemite G ja H jaoks teoreemi väide kehtib. Vaatleme väärtustust $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Kui F on antud väärtustusel tõene, siis on vaja näidata, et tuletatav on sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash F$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G \& H$. Et valemid G ja H peavad vaadeldaval väärtustusel olema tõesed, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatavad sekventsid $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G$ ja $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash H$. Otsitava sekventsi saame tuletada järgmiselt:

$$\dfrac{\dfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G} \quad \dfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash H}}{A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash G \& H}.$$

Kui valem F on sellel väärtustusel väär, siis on vaja näidata, et tuletatav on sekvents $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg F$ ehk $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg(G \& H)$. Valem F saab olla väär kahel juhul.

Kui G on väär, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg G$ ja vajalik tuletus on

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},G,H\vdash G}}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},G\,\&\,H\vdash G}\qquad\dfrac{\dfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg G}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},G\,\&\,H\vdash\neg G}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg(G\,\&\,H)}$$

Kui H on väär, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg H$ ja vajalik tulemus on

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},G,H\vdash H}}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},G\,\&\,H\vdash H}\qquad\dfrac{\dfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg H}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n},G\,\&\,H\vdash\neg H}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg(G\,\&\,H)}$$

Juht 3 ($\vee$).

Olgu valem F kujul $G\vee H$. Eeldame, et valemite G ja H jaoks teoreemi väide kehtib. Vaatleme väärtustust $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Kui valem F on antud väärtustusel tõene, siis on vaja näidata, et tuletatav on sekvents $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash F$ ehk $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash G\vee H$. Valem F saab olla tõene kahel juhul. Kui G on tõene, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash G$ ja vajalik tuletus on:

$$\dfrac{\dfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash G}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash G\vee H}\,.$$

Kui H on tõene, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash H$ ja vajalik tuletus on:

$$\dfrac{\dfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash H}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash G\vee H}\,.$$

Kui valem F on sellel väärtustusel väär, siis on vaja näidata, et tuletatav on sekvents $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg F$ ehk $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg(G\vee H)$. Et valemid G ja H peavad olema väärad, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav nii sekvents $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg G$ kui ka sekvents $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg H$. Tähistades $\Gamma := A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}$, saame otsitava sekventsi tuletada järgmiselt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\ldots}{\Gamma\vdash\neg G}\qquad\dfrac{\ldots}{\Gamma\vdash\neg H}}{\Gamma\vdash\neg G\,\&\,\neg H}\qquad\dfrac{\dfrac{M}{\Gamma,\neg G\,\&\,\neg H\vdash\neg(G\vee H)}}{\Gamma\vdash\neg G\,\&\,\neg H\supset\neg(G\vee H)}}{\Gamma\vdash\neg(G\vee H)}\,,$$

millest

$$M := \dfrac{\dfrac{\overline{\overline{\neg G,\neg H,G\vdash G}} \quad \dfrac{\dfrac{\overline{\overline{\neg G,\neg H,H,\neg G\vdash H}} \quad \overline{\overline{\neg G,\neg H,H,\neg G\vdash\neg H}}}{\neg G,\neg H,H\vdash\neg\neg G}}{\neg G,\neg H,H\vdash G}}{\neg G,\neg H,G\vee H\vdash G} \quad \overline{\overline{\neg G,\neg H,G\vee H\vdash\neg G}}}{\neg G,\neg H\vdash\neg(G\vee H)}$$

Juht 4 ($\supset$).

Olgu valem F kujul $G\supset H$. Eeldame, et valemite G ja H jaoks teoreemi väide kehtib. Vaatleme väärtustust $(\alpha_1,...,\alpha_n)$.

Kui F on sellel väärtustusel tõene, siis on vaja näidata, et tuletatav on sekvents $A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash F$ ehk $A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash G\supset H$. Valem F on tõene kui G on väär või kui H on tõene. Kui G on väär, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg G$ ja vajalik tuletus on:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{...}{A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg G}}{A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n},G\vdash\neg G} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{G,\neg G,H\vdash G}} \quad \overline{\overline{G,\neg G,H\vdash\neg G}}}{G,\neg G\vdash\neg\neg H}}{A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n},G,\neg G\vdash H}}{A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n},G\vdash\neg G\supset H}}{A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n},G\vdash H}}{A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash G\supset H}.$$

Teisel juhul, kui H on tõene, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatav sekvents $A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash H$ ja vajalik tuletus on:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{...}{A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash H}}{A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n},G\vdash H}}{A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash G\supset H}.$$

Kui valem F on sellel väärtustusel väär, siis on vaja näidata, et tuletatav on sekvents $A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg F$ ehk $A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg(G\supset H)$. Et valem G peab siin olema tõene ja valem H väär, siis induktsiooni eelduse põhjal on tuletatavad sekventsid $A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash G$ ning $A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}\vdash\neg H$. Tähistades $\Gamma:=A_1^{\alpha_1},...,A_n^{\alpha_n}$ saame otsitava sekventsi tuletada järgmiselt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{...}{\Gamma\vdash G}}{\Gamma,G\supset H\vdash G} \quad \overline{\overline{\Gamma,G\supset H\vdash G\supset H}}}{\Gamma,G\supset H\vdash H} \quad \dfrac{\dfrac{...}{\Gamma\vdash\neg H}}{\Gamma,G\supset H\vdash\neg H}}{\Gamma\vdash\neg(G\supset H)}.$$

Sellega on kõik juhud läbi vaadatud. ■

Teoreem 4 (Lausearvutuse täielikkuse teoreem).

Kui sekventsi $F_1,F_2,...,F_n\vdash G$ valemkuju on samaselt tõene, siis sekvents on tuletatav.

Tõestus.

Tühja vasaku poolega sekventside jaoks.

Eeldame kõigepealt, et $n=0$. Siis on meil tegemist sekventsiga $\vdash G$, kus G on samaselt tõene. Näitame, et $\vdash G$ on tuletatav.

Olgu $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n}$ kõik lausemuutujad, mis sisalduvad valemis G. Et valem G on samaselt tõene, siis järeldub eelmisest teoreemist (lk 15), et suvalise väärtustuse $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ korral saab tuletada sekventsi $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_n^{\alpha_n} \vdash G$ ning järelikult, kui võtta $\alpha_n = 1$ ja $\alpha_n = 0$, saab tuletada ka sekventsid $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, A_n \vdash G$ ja $A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \neg A_n \vdash G$.

Konstrueerime tuletuspuu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{M}{\vdash A_n \vee \neg A_n}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash A_n \vee \neg A_n} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, A_n \vdash G} \quad \dfrac{\ldots}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \neg A_n \vdash G}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, A_n \vee \neg A_n \vdash G}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash A_n \vee \neg A_n \supset G}}{A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash G}$$

$$M := \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{\neg(A_n \vee \neg A_n), A_n \vdash A_n}}}{\neg(A_n \vee \neg A_n), A_n \vdash A_n \vee \neg A_n} \quad \overline{\overline{\neg(A_n \vee \neg A_n), A_n \vdash \neg(A_n \vee \neg A_n)}}}{\neg(A_n \vee \neg A_n) \vdash \neg A_n}}{\neg(A_n \vee \neg A_n) \vdash A_n \vee \neg A_n} \quad \overline{\overline{\neg(A_n \vee \neg A_n) \vdash \neg(A_n \vee \neg A_n)}}}{\vdash \neg\neg(A_n \vee \neg A_n)}}{\vdash A_n \vee \neg A_n}$$

Seega, suvalise tõeväärtuste komplekti $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ korral saab tuletada sekventsi

$$A_1^{\alpha_1},\ldots,A_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash G .$$

Sama arutelu korrates eemaldame vasakust poolest ka ülejäänud literaalid, millega jõuame järelduseni, et sekvents $\vdash G$ on tuletatav.

Mittetühja vasaku poolega sekventside jaoks.

Olgu nüüd $n > 0$. Et sekventsi valemkuju $F_1 \& \ldots \& F_n \supset G$ on samaselt tõene, siis on tõestuse eelmise osa põhjal tuletatav sekvents

$$\vdash F_1 \& \ldots \& F_n \supset G .$$

Siis on ka sekvents $F_1,\ldots,F_n \vdash G$ tuletatav:

$$\dfrac{\dfrac{\ldots}{F_1,\ldots,F_n \vdash F_1 \& \ldots \& F_n} \quad \dfrac{\ldots}{F_1,\ldots,F_n \vdash F_1 \& \ldots \& F_n \supset G}}{F_1,\ldots,F_n \vdash G} .$$

Vasakus harus oleva sekventsi saab tuletada konjunktsiooni komponentideks lahutades, parema haru sekvents on tuletatav ka ilma vasaku pooleta. ■

Võttes korrektsuse ja täielikkuse teoreemi kokku, võime anda sekventsiaalse lausearvutuse tuletatavuse kirjelduse, st formuleerida tingimuse, millal sekvents on tuletatav ja millal mitte.

Järeldus 1. Sekventsiaalses lausearvutuses on tuletatavad parajasti need sekventsid, mille valemkuju on samaselt tõene.

3. Sekventsiaalne predikaatarvutus

Definitsioon. Gentženi-tüüpi predikaatarvutuse aksiomaatiline teooria defineeritakse järgmiselt:

1) Tuletatavateks objektideks on **sekventsid**, avaldised kujul
$$F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G,$$
kus $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$ on predikaatarvutuse valemid, mis ei sisalda lausearvutuse tehtena ekvivalentsi.
2) Aksioomid on sekventsid
$$\Gamma, F, \Delta \vdash F,$$
kus F on mingi lausearvutuse valem ning Γ ja Δ tähistavad suvalisi valemite järjendeid, mis võivad olla ka tühjad.
3) Tuletusreeglid on kõik lausearvutuse tuletusreeglid ja järgmised **kvantorreeglid**.

Paremale sissetoomise reegel	Vasakule sissetoomise reegel
$\dfrac{\Gamma \vdash F(x)}{\Gamma \vdash \forall x F(x)}\ (\vdash \forall)^*$	$\dfrac{\Gamma, F(t) \vdash G}{\Gamma, \forall x F(x) \vdash G}\ (\forall \vdash)$
$\dfrac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x F(x)}\ (\vdash \exists)$	$\dfrac{\Gamma, F(x) \vdash G}{\Gamma, \exists x F(x) \vdash G}\ (\exists \vdash)^*$

Siin tähendab * tingimust, et muutuja x ei tohi esineda vabalt sekventsi üheski teises valemis, ning t on suvaline term.

Tuletamine

Üldisuskvantori paremale sissetoomise reegel ($\vdash \forall$) vastab matemaatilistes tõestustes sammule, kus selleks, et näidata mingi väite kehtivust kõigi objektide korral, valitakse vabalt üks objekt ja näidatakse väite kehtivus selle korral. Valitud objekti tähistatakse unikaalse muutujaga, mis on teistest muutujatest sõltumatu. Tingimus * garanteerib, et eeldusteks olevate valemite tõeväärtus jääb muutuja x erinevatel väärtustel samaks, mistõttu sellest, et väide kehtib vabalt valitud objekti x korral, võib järeldada, et väide kehtib kõigi objektide korral.

Üldisuskvantori vasakule sissetoomisel ($\forall \vdash$) seevastu ei ole kitsendavat tingimust vaja: eeldused $\Gamma, F(t)$ on nõrgemad kui eeldused $\Gamma, \forall x F(x)$ (sest valemist $\forall x F(x)$ järeldub $F(t)$ suvalise termi t korral). **Kui mingitel eeldustel väide G kehtib, siis kehtib ta alati ka tugevamatel eeldustel.**

Olemasolukvantori vasakule sissetoomise reegel ($\exists \vdash$) vastab sammule, kus tõestamisel kasutatakse eeldust mingi objekti leidumise kohta ja tuuakse sisse sümbol selle tähistamiseks. Tingimus * väljendab asjaolu, et üldiselt võib see objekt erineda kõigist nendest, millele selle hetkeni on tõestuses viidatud, seetõttu tuleb teda märkida erineva sümboliga. Tõestamine, et G järeldub eeldustest $\Gamma, \exists x F(x)$ taandub siis tõestamisele, et G järeldub eeldustest $\Gamma, F(x)$, kus x on tähis, mis kuskil mujal vabalt ei esine.

Olemasolukvantori paremale sissetoomisel ($\vdash \exists$) pole jällegi kitsendust vaja, sest kui eeldustest Γ järeldub väide $F(t)$, siis järeldub samadest eeldustest ka nõrgem väide $\exists x F(x)$, st kui objekt, mille korral väide $F(x)$ kehtib, on otseselt kätte näidatud, siis selline objekt ilmselt leidub.

Kitsendusega reeglite joonepealsetes sekventsides esinev muutuja x võib omandada piiranguteta suvalisi väärtusi. Joonepealne sekvents tähendab seega järeldumist muutuja x iga väärtuse korral.

Tuletuse otsimisel tasub püüda rakendada **kitsendusega (tärniga) reegleid puu allosas** ja **ilma kitsenduseta reegleid ülaosas**. Kvantorreegleid vastupidises järjekorras rakendades võime mingil sammul jõuda sekventsini, mille tuletamine on võimatu.

Korrektsus

Teoreem 5 (Sekventsiaalse predikaatarvutuse korrektsuse teoreem).

Kui sekvents $F_1, F_2, ... F_n \vdash G$ on tuletatav, siis tema valemkuju on samaselt tõene.

Tõestus.

Kasutame induktsiooni tuletuspuu struktuuri järgi.

Induktsiooni baas.

Kui sekvents on aksioom, siis võime arutleda samamoodi nagu lausearvutuse korrektsuse teoreemis (lk 13).

Induktsiooni samm.

Näitame iga reegli korral, et kui mingis interpretatsioonis on joonepealsete sekventside valemkujud vabade muutujate kõikidel väärtustustel tõesed, siis on selles interpretatsioonis vabade muutujate kõikidel väärtustel tõene ka joonealuse sekventsi valemkuju. Et aksioomide valemkujud on samaselt tõesed, siis on järelikult ka kõigi aksioomidest tuletatud sekventside valemkujud samaselt tõesed. Lausearvutuse reeglite korral saab tõestuse üle kanda vastavast teoreemist lausearvutuse kohta (lk 13). Vaja on vaadelda veel kvantorreegleid. Piirdume siinkohal üldisuskvantoriga, olemasolukvantori puhul on tõestus analoogiline.

Üldisuskvantori paremale sissetoomise reegel ($\vdash \forall$).

Joonepealse sekventsi valemkuju on $F_1 \& F_2 \& ... \& F_n \supset F(x)$, joonealuse sekventsi valemkuju aga $F_1 \& F_2 \& ... \& F_n \supset \forall x F(x)$.

Oletame, et mingis interpretatsioonis α on esimene valemkuju oma vabade muutujate kõikidel väärtustel tõene, kuid teine valemkuju on oma vabade muutujate mingitel väärtustel väär. Sel juhul peab valem $F_1 \& F_2 \& ... \& F_n$ olema tõene ja valem $\forall x F(x)$ väär. Järelikult leidub interpretatsiooni põhihulgas M_α element m nii, et vabade muutujate antud väärtustel on $F(m)$ väär. Tingimuse * tõttu ei esine muutuja x osavalemis $F_1 \& F_2 \& ... \& F_n$. Seega kui esimeses valemkujus valida muutuja x väärtuseks element m ja ülejäänud vabadele muutujatele anda samad väärtused nagu teises valemkujus, siis on esimene valemkuju väär, vastuolu.

Üldisuskvantori vasakule sissetoomise reegel ($\forall \vdash$).

Joonepealse sekventsi valemkuju on $F_1 \& F_2 \& ... \& F_n \& F(t) \supset G$, joonealuse sekventsi valemkuju aga $F_1 \& F_2 \& ... \& F_n \& \forall x F(x) \supset G$.

Oletame, et mingis interpretatsioonis α on esimene valemkuju oma vabade muutujate kõikidel väärtustel tõene, kuid teine valemkuju on oma vabade muutujate mingitel väärtustel väär. Siis peab valem $F_1 \& F_2 \& ... \& F_n \& \forall x F(x)$ olema tõene ja valem G väär. Konjunktsiooni omaduste põhjal on valemid $F_1 \& F_2 \& ... \& F_n$ ja $\forall x F(x)$ tõesed.

Anname esimeses valemkujus suvalised väärtused termi t nendele vabadele muutujatele, mis teises valemkujus ei esine, ja ülejäänud vabadele muutujatele samad väärtused nagu teises valemkujus. Et $\forall x F(x)$ on tõene, siis ka $F(t)$ on tõene. Järelikult on esimeses valemkujus implikatsiooni vasak pool tõene ja kogu valemkuju väär, vastuolu. ■

Olemasolukvantori paremale sissetoomise reegel.

TODO

Olemasolukvantori vasakule sissetoomise reegel.

TODO

Mittevasturääkivus

Teoreem 6 (Predikaatarvutuse mittevasturääkivuse teoreem). Sekventsiaalses predikaatarvutuses on mittevasturääkiv.

Tõestus. Tõestus on analoogiline lausearvutuse juhuga (lk 15).

Täielikkus

Teoreem 7 (Predikaatarvutuse täielikkuse teoreem). Kui sekventsi $F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$ valemkuju on samaselt tõene, siis sekvents on tuletatav.

Järeldus 2. Sekventsiaalses predikaatarvutuses on tuletatavad parajasti need sekventsid, mille valemkuju on samaselt tõene.

4. Võrdusega predikaatarvutus

Definitsioon. Võrdusega predikaatarvutuse aksiomaatiline teooria signatuuris σ defineeritakse järgmiselt:

1) Tuletatavateks objektideks on **sekventsid** $F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$, kus $F_1, F_2, ..., F_n, G$ on valemid signatuuris σ.
2) Aksioomid on kõik puhta predikaatarvutuse aksioomid ja järgmised **võrduse aksioomid**:
   - Re) $\Gamma \vdash t = t$, kus t on term signatuuris σ;
   - $= f$) $s_1 = t_1, ..., s_n = t_n \vdash f(s_1, ..., s_n) = f(t_1, ..., t_n)$, kus $s_1, ..., s_n$ ja $t_1, ..., t_n$ on termid signatuuris σ ning f on signatuuri σ funktsionaalsümbol;
   - $= P$) $s_1 = t_1, ..., s_n = t_n \vdash P(s_1, ..., s_n) \supset P(t_1, ..., t_n)$, kus $s_1, ..., s_n$ ja $t_1, ..., t_n$ on termid signatuuris σ ning P on signatuuri σ predikaatsümbol.
3) Tuletusreeglid on kõik puhta predikaatarvutuse tuletusreeglid.

Aksioom Re väljendab võrduse **refleksiivsust**, aksioomid $= f$ ja $= P$ aga võimaldavad asendada vastavalt funktsionaal- ja predikaatsümboli argumentides terme võrdsete termidega. Võrduse **sümmeetrilisus** ja **transitiivsus** osutuvad selles süsteemis tuletatavateks omadusteks.

Korrektsus

TODO

Mittevasturääkivus

TODO

Täielikkus

TODO

5. Esimest järku aksiomaatilised teooriad

Esimest järku aksiomaatilised teooriad defineeritakse järgmiselt:
Olgu fikseeritud **signatuur** σ.

1) Tuletatavateks objektideks on **sekventsid** $F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$, kus $F_1, F_2, ..., F_n, G$ on **valemid signatuuris** σ.
2) Aksioomid on kõik **puhta predikaatarvutuse aksioomid** ja lisaks neile teooria **omaaksioomid** ehk **eriaksioomid**.
3) Tuletusreeglid on kõik **puhta predikaatarvutuse tuletusreeglid**.

Esimest järku teooria mõiste haarab teiste hulgas ka **puhta predikaatarvutuse** (sel juhul on omaaksioomide hulk **tühi**), ning **võrdusega predikaatarvutuse** (omaaksioomideks on **võrduse aksioomid**).

Teoreem 8 (Korrektsuse teoreem).
Kui sekvents $F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$ on esimest järku teoorias tuletatav, siis tema valemkuju on tõene teooria **omaaksioomide kõikides mudelites**.

Teoreem 9 (Mittevasturääkivuse teoreem).
Kui esimest järku teooria **omaaksioomidel leidub mudel**, siis on see teooria mittevasturääkiv.

Teoreem 10 (Täielikkuse teoreem).
Kui sekventsi $F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$ valemkuju on tõene esimest järku teooria **omaaksioomide kõikides mudelites**, siis sekvents on teoorias tuletatav.

Formaalne aritmeetika

Formaalne aritmeetika on **mudelis** N **korrektne**, st kõik tuletatavad sekventsid on mudelis N tõesed.

Teoreem (Aritmeetika mittetäielikkuse teoreem; 1931 – Kurt Gödel).
Kui formaalne aritmeetika on mittevasturääkiv, siis

1) leidub valem, mis on mudelis N tõene, aga pole formaalses aritmeetikas tuletatav (formaalne aritmeetika on **mittetäielik**);
2) ka lõpliku (või üldiselt lahenduva) hulga mudelis N tõeste aksioomide lisamine ei muuda formaalset aritmeetikat täielikuks.

Juba 19. sajandil oli arvuteoorias teoreeme, mis ei järeldunu formaalse aritmeetika aksioomidest.

Kaugema järeldusena tähendab see seda, et **kogu matemaatika aksiomatiseerimine pole realiseeritav**.

4. TURINGI MASINAD

1. Turingi masina mõiste

Definitsioon. Turingi masin on algoritmi mõiste formalisatsioon, mis defineeritakse järgmiselt:

Turingi masin koosneb **lindist**, **lugevast-kirjutavast peast**, **sisemälust** ja **käskude tabelist**.

Lint on mõlemas suunas lõpmatu ning jagatud ühesuurusteks pesadeks. Igasse pessa on kirjutatud üks sümbol lõplikust **tähestikust** $\{s_1, s_2, ..., s_m\}$ või tühik s_0. Eeldame, et alguses on lindil vaid lõplik hulk tühikust erinevaid sümboleid, kõik ülejäänud pesad on täidetud tühikutega.

Lugev-kirjutav pea võib liikuda mööda linti pesast pesasse, lugeda pesas oleva sümboli või kirjutada sinna olemasoleva sümboli asemele uue.

Sisemälu on igal ajamomendil ühes lõplikust hulgast **seisunditest** $q_0, q_1, ..., q_k$, millest seisundeid $q_1, ..., q_k$ nimetatakse **aktiivseteks** ning seisundit q_0 **passiivseks**. Masin alustab arvutusi esimeses aktiivses seisundis q_1, töö käigus võib ta üle minna ühest seisundist teise.

Instruktsioone pea tegevuse ja seisundite muutmise kohta esitatakse **käskudena**

$$s_a q_b \to s_c q_d K,$$

kus s_a ja s_c tähistavad sümboleid ($0 \le a, c \le m$), q_b ja q_d seisundeid ($1 \le b \le k, 0 \le d \le k$) ning K on üks tähtedest L, R, C. Sama vasaku poolega käske ei tohi olla rohkem kui üks. Vasaku poole järgi koondatakse käsud tabelisse, mille read vastavad masina seisundile, veerud aga tähestiku sümbolitele:

	s_0	s_1	$\cdots$	s_a	$\cdots$	s_m
q_1						
$\vdots$						
q_b				$s_c q_d K$		
$\vdots$						
q_k						

Mõned lahtrid võivad ka tühjaks jääda, kui vastava vasaku poolega käsku ei ole. Tabel määrab seega konkreetse Turingi masina, tihti nimetatakse tabelit ka Turingi masina **programmiks**.

Turingi masin töötab **taktide kaupa**, iga takti täitmine võtab **ühe ajaühiku**. Oletame, et pea all on sümbol s_a ning masin on seisundis q_b. Kui tabeli lahtris, mis vastab sümbolile s_a ning seisundile q_b, leidub käsk $s_c q_d K$, siis kirjutatakse lindile pea all olevasse pessa sümboli s_a asemele sümbol s_c, masin läheb seisundist q_b seisundisse q_d ning pea liigub ühe positsiooni võrra vasakule, ühe positsiooni võrra paremale või ei liigu üldse vastavalt K väärtusele L, R või C. Sellega on üks takt läbi, samasugune tegevus kordub igal järgmisel taktil. **Masin lõpetab töö**, kui ta mingi käsu toimel siirdub passiivsesse seisundisse q_0 või kui järgmisena täitmisele kuuluvat käsku pole olemas (täitmisjärg jõuab tühja lahtrisse). Kui aga kumbagi olukorda ette ei tule, siis **jätkub masina töö lõpmatult**.

Definitsioon. Komplekti, mis koosneb Turingi masina lindi lahtrite sisust, pea asukohast ja masin seisundist, nimetatakse **Turingi masina situatsiooniks**.

Definitsioon. Komplekti, mis koosneb Turingi masina lindi lahtrite sisust ja pea asukohast, nimetatakse **Turingi masina konfiguratsiooniks**.

Arvuliste funktsioonide arvutamine Turingi masinal

Fikseerime tähestiku järgmiselt: $s_0 = -, s_1 = 0, s_2 = 1$. Naturaalarvu x esitame lindil sümbolijadana

$$0\underbrace{11\ldots1}_{x\,ühte}.$$

Naturaalarvude järjendi $(x_1,\ldots,x_n)$ esitus olgu

$$0\underbrace{11\ldots1}_{x_1\,ühte}0\underbrace{11\ldots1}_{x_2\,ühte}\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{x_n\,ühte}.$$

Ülaltoodud kujuga sümbolijadaga konfiguratsiooni, kus masina pea asub **viimase nulli** (viimase arvu algust tähistava nulli) kohal, nimetatakse **standardkonfiguratsiooniks**.

Standardseks nimetatakse ka Turingi masina **seisu**, kui tema puhul on masina konfiguratsioon standardne.

Definitsioon 1. Turingi masina M poolt arvutatav n muutuja funktsioon f_M^n defineeritakse järgmiselt. Eeldame, et masina töö alguses on lindil

$$0\underbrace{11\ldots1}_{x_1\,ühte}0\underbrace{11\ldots1}_{x_2\,ühte}\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{x_n\,ühte}$$

ja pea asub viimase nulli kohal. Kui masin peatub lõpliku arvu sammude järel, töö lõpus on lindil

$$0\underbrace{11\ldots1}_{x_1\,ühte}0\underbrace{11\ldots1}_{x_2\,ühte}\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{x_n\,ühte}0\underbrace{11\ldots1}_{y\,ühte}$$

ja pea asub viimase nulli kohal, siis funktsiooni f_M^n väärtuseks argumentidel $x_1, x_2,\ldots,x_n$ on y. Vastasel korral on funktsiooni väärtus nendel argumentidel määramata.

Definitsioon 2. Funktsiooni f nimetatakse **Turingi mõttes arvutatavaks**, kui leiduvad Turingi masin M ja naturaalarv n nii, et $f = f_M^n$.

Turingi masina tabeleid on **loenduv hulk**, mistõttu on Turingi mõttes arvutatavate funktsioonide hulk loenduv. Et aga kõigi naturaalarvuliste n muutuja funktsioonide hulk on **kontiinumi võimsusega**, siis leidub mittearvutatavaid funktsioone isegi rohkem kui arvutatavaid.

Churchi tees. Iga algoritmiliselt arvutatav funktsioon on **Turingi mõttes arvutatav**.

„Algoritmiliselt arvutatav" on mittematemaatiline mõiste ja väljendab inimeste tavaarusaama algoritmidest.

2. Kompositsioon ja hargnemine

Eeldame, et kõik vaadeldavad masinad töötavad ühes ja samas tähestikus $\{s_1, s_2,\ldots,s_m\}$.

Tähis. Kui masin M alustab tööd konfiguratsioonis X ja peatub lõpliku arvu sammude järel konfiguratsioonis X', siis kirjutame $M(X) = X'$. Kui aga masin M töötab konfiguratsiooni X puhul lõpmatult, siis märgime $M(X) = \perp$.

Kompositsioon

Definitsioon 3. Turingi masinat M nimetatakse **masinate M_1 ja M_2 kompositsiooniks**, kui iga algkonfiguratsiooni X korral kehtib võrdus $M(X) = M_2(M_1(X))$. **Tähis:** $M_2 \circ M_1$

Masin M, mis on masinate M_1 ja M_2 kompositsioon, ei pea modelleerima nende masinate tööd ega olema nendega muul moel seotud peale alg- ja lõppkonfiguratsioonide võrduse.

Teoreem 1. Kui M_1 ja M_2 on samas tähestikus töötavad Turingi masinad, siis saab nende masinate tabelite järgi alati koostada kompositsioonmasina tabeli.

Hargnemine

Definitsioon 4. Olgu Turingi masinal M_0 kaks passiivset seisundit q_0^1 ja q_0^2. Masinat M nimetatakse **masinate M_1 ja M_2 hargnemiseks masina M_0 järgi**, kui iga algkonfiguratsiooni X korral

$$M(X) = \begin{cases} M_1(M_0(X)), & \text{kui masin } M_0 \text{ lõpetab konfiguratsiooni } X \text{ korral töö seisundis } q_0^1, \\ M_2(M_0(X)), & \text{kui masin } M_0 \text{ lõpetab konfiguratsiooni } X \text{ korral töö seisundis } q_0^2, \\ M_0(X), & \text{muudel juhtudel.} \end{cases}$$

Mõnikord nõutakse ühtsuse mõttes veel, et M_0 lõpetab alati töö emmas-kummas passiivses seisundis, st ei tööta lõpmatult ega satu tühja lahtrisse. Samuti eeldatakse sageli, et tingimuse kontrollimine ei muuda konfiguratsiooni, st alati $M_0(X) = X$.

Teoreem 2.
Kui M_0, M_1 ja M_2 on samas tähestikus töötavad Turingi masinad, kusjuures masinal M_0 on kaks passiivset seisundit q_0^1 ja q_0^2, siis saab nende masinate tabelite järgi alati koostada sellise masina tabeli, mis on masinate M_1 ja M_2 hargnemine masina M_0 järgi.

3. Turingi masinate numeratsioon

Definitsioon. Turingi masina, mille lindil võivad olla sümbolid $\{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$, **käsu**

$$s_a q_b \rightarrow s_c q_d K$$

Gödeli numbriks nimetatakse arvu

$$g(s_a q_b \rightarrow s_c q_d K) = 2^a 3^b 5^c 7^d 11^k,$$

kus k on 1, 2 või 3 vastavalt sellele, kas K on L, R või C.

Gödeli numbri järgi saab käsu üheselt taastada.

Leidub arve, mis pole ühegi käsu Gödeli numbriks. Selleks, et arv oleks mingi käsu Gödeli number, peavad 2 ja 5 astmed asuma 0 ja m vahel, 3 aste peab olema vähemalt 1, sest käsu vasakul poolel on aktiivne seisund, 7 aste peab olema vähemalt 0 ning 11 aste kas 1, 2 või 3.

Lepitakse kokku, et Turingi masina käsud järjestatakse asukoha järgi masina tabelis: igas reas vasakult paremala ja read ise ülevalt alla.

Definitsioon. Käskudest $C_1, C_2, ..., C_t$ koosneva **Turingi masina** M **Gödeli numbriks** nimetatakse arvu

$$G(M) = 2^{g(C_1)} 3^{g(C_2)} ... p_t^{g(C_t)},$$

kus p_t on t-s algarv.

Masina numbri järgi saab üheselt taastada masina kõigi käskude numbrid ning viimase abil omakord kõik masina käsud. Leidub arve, mis pole ühegi masina Gödeli numbriks.

Definitsioon. **Tihendatud numeratsiooni järgi** i**-ndaks Turingi masinaks** nimetatakse masinat T_i, mis on

1) $i = 0$ korral vähima Gödeli numbriga Turingi masin;
2) $i > 1$ korral vähima Gödeli numbriga Turingi masin, mis ei kuulu hulka $\{T_0, ..., T_{i-1}\}$.

Tihendatud numeratsiooni järgi vastab igale arvule mingi Turingi masin.

4. Mittearvutatavad funktsioonid

Definitsioon 5. Öeldakse, et Turingi masin M lahendab omadust R, kui tema poolt arvutatav ühe muutuja funktsioon on

$$f_M(x) = \begin{cases} 1, \text{kui masinal } T_x \text{ on omadus } R, \\ 0, \text{kui masinal } T_x \text{ ei ole omadust } R, \end{cases}$$

Definitsioon. Öeldakse, et Turingi masin T_x on **eneselerakendatav**, kui ta peatub sisendargumendil x.

Teoreem 3. Ei leidu Turingi masinat, mis lahendaks eneselerakendatavuse omadust.

Teoreem 4. Ei leidu Turingi masinat, mis kontrolliks argumentide x ja y järgi, kas masin T_x lõpetab argumendil y töö lõpliku arvu sammudega.

Teoreem 5 (Rice'i teoreem). Olgu A kõigi Turingi mõttes arvutatavate funktsioonide hulga mittetühi pärisalamhulk. Ei leidu Turingi masinat, mis kontrolliks argumendi x järgi, kas Turingi masina T_x poolt arvutatav funktsioon kuulub hulka A.

Rice'i teoreemist järeldub, et algoritmiliselt (Turingi masinaga) ei saa kindlaks teha ühtegi Turingi masinate omadust, mis on väljendatud masinate poolt arvutatavate funktsioonide kaudu, välja arvatud kaks **triviaalset omadust**, millest üks kehtib kõigi funktsioonide, teine aga mitte ühegi funktsiooni kohta.

Järeldused programmeerimise jaoks

Kaugema järeldusena tähendab see seda, et suvalise programmeerimiskeele puhul ei saa kontrollida ühtegi programmide omadust, mis programmeerijale tegelikult huvi pakub, näiteks kas programm arvutab seda **funktsiooni**, mille jaoks ta on kirjutatud, või kas ta **lõpetab töö i**gasuguse sisendi korral. Niisugusel interpretatsioonil on olemas pessimistlik ja optimistlik aspekt. Pessimistlikust vaatepunktist on **arvuti väga piiratud võimalustega**. Ta mitte ainult ei suuda teha midagi, mida talle täpselt ette kirjutatud pole, vaid paljude oluliste ülesannete lahenduskäiku pole üldse võimalik ette kirjutada. Optimistlikust seisukohast võib neid tulemusi aga interpreteerida nii, et programmeerimises leidub ülesandeid, mida ei saa lahendada puhtmehaaniliselt, arvuti abil, vaid mis sisaldavad arvuti jaoks kättesaamatuid loomingulisi momente. Selliste ülesannete lahendamine nõuab järelikult **intuitsiooni** ja **loovust**, mida käesoleva hetkeni suudab ilmutada ainult **inimene**.